Einführung in die Methode der Panelregression

RatSWD – Nachwuchsworkshop

Längsschnittanalysen auf der Basis amtlicher Sozial- und Wirtschaftsdaten

Axel Werwatz
Stefan Mangelsdorf

Paneldaten

$$\{y_{it}, \mathbf{x}_{it}\}_{i=1,\ldots,N \quad t=1,\ldots,T}$$

- N ist groß (N=75240 in AFiD)
- T ist klein (T=12 in AFiD)
- Formeln für balanced panel (jedes i in jeder Periode; unrealistisch aber hilfreich hier)
- zeitkonstante und zeitveränderliche Variablen

Wozu Paneldaten?

Josef Brüderl:

1. zur Schätzung kausaler Effekte trotz unbeobachteter Heterogenität (Marriage-Premium for Men?)
2. zur Analyse individueller Dynamik
3. zur präziseren Schätzung (mehr Beobachtungen)

zu 3: „Auf Grund der inzwischen oft anzutreffenden Stichprobengrößen in praktischen Anwendungen sind mmögliche Effizienzgewinne eher von rein theoretischem Interesse“ Lechner (AstA 2002)

Beispiel zu 1): kausale Effekte

Forschungsfrage: Sind exportierende Betriebe produktiver als nichtexportierende?

$$lnap_{it} = \beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma} + v_{it}$$

ln(Arbeitsproduktivität)

Exporteur in *t*-Dummy

„Kontrollvariablen“
„beobachtete Heterogenität“

Fehlerterm

Beispiel zu 1): kausale Effekte

Forschungsfrage: Sind exportierende Betriebe produktiver als nichtexportierende?

$$lnap_{it} = \beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma} + v_{it}$$

Linearer Ansatz mit zeitkonstanten Koeffizienten.
Fokus auf β_1.

Das ist noch kein Modell. Wichtig: Annahmen über v_{it}.

Beispiel und Panel-Modell Notation (1)

$$lnap_{it} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma}} + v_{it}$$

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}$$

$$= \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Konstante(n),
Treatment-Variable (exp_{it}),
Kontrollvariablen ($\mathbf{w}_{it}$)
alle in $\mathbf{x}_{it}$ subsumiert

idiosynchratische
Fehlerkomponente

zeitkonstante, inviduenspezifische
Komponente des Fehlerterm,
„unbeobachtete Heterogenität“

Beispiel und Panel-Modell Notation (2)

$$lnap_{it} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma}} + v_{it}$$

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}$$

$$= \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Notation von Josef Brüderl

$$y_{it} = \beta_1 x_{it} + u_{it}$$

$$u_{it} = v_i + \varepsilon_{it}$$

Unsere Notation folgt weitestgehend

Jeffrey Wooldridge, *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, MIT Press 2002.

Beispiel und Panel-Modell

$$lnap_{it} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma}}_{} + v_{it}$$

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Forschungsziel: Partieller Effekt von *exp* auf Mittelwert von *lnap* gegeben Kontrollvariablen **und** unbeobachtete Heterogenität

Im Allgemeinen $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i)$

Im linearen Panel Modell mit idiosynchratischen u_{it}:

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \beta_j$$

Lineares Panel-Modell

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \qquad v_{it} = c_i + u_{it}$$

$$\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \beta_j$$

$$\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}) = \mathrm{E}_{c_i|\mathbf{x}_{it}}\left[\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i)\right] = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}(c_i \mid \mathbf{x}_{it})$$

Im Allgemeinen $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}) = \beta_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(c_i \mid \mathbf{x}_{it}) \neq \beta_j$

➔ Ignorieren wir c_i, dann ist der partielle Effekt nicht der gewünschte (kausale, originäre, ceteris paribus) Effekt von x_j, geg. beobachtete Kontrollvariablen und unbeobachtete Heterogenität

Lineares Panel-Modell

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \qquad v_{it} = c_i + u_{it} \qquad \mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \beta_j \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}) = \beta_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(c_i \mid \mathbf{x}_{it})$$

Es sei $\mathrm{E}(c_i \mid \mathbf{x}_{it}) = \delta_0 + \delta_1 x_{1,it} + \ldots + \delta_j x_{j,it} + \ldots + \delta_K x_{K,it}$

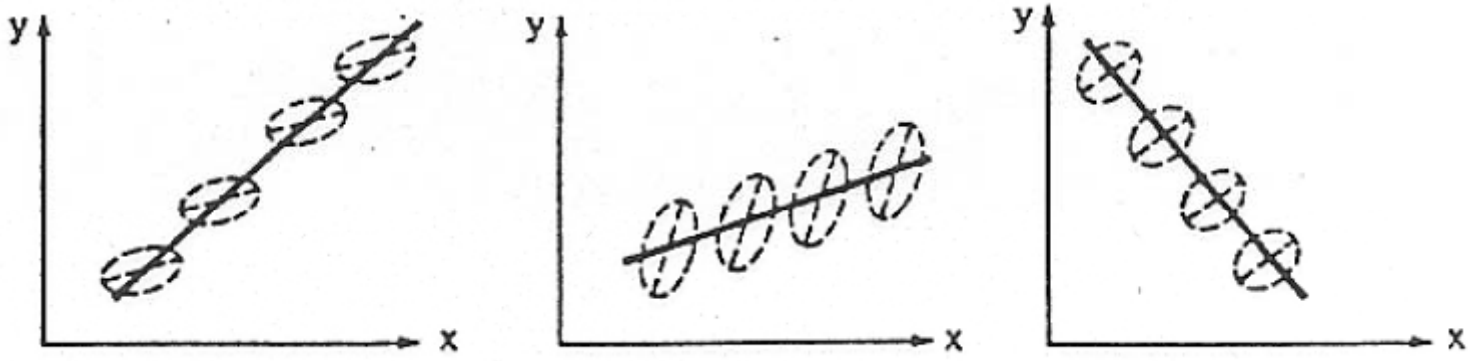
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}) = \beta_j + \delta_j$$

Im Beispiel: Exportieren tendenziell die „starken“ Betriebe (δ_j>0) dann überschätzt die Regression ohne Berücksichtigung von c_i im Mittel den „wahren“ Exporteffekt (β_j)

Aber: wenn x_j und c unabhängig (unkorrliert) sind, dann ist δ_j=0 und $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}) = \beta_j$

Warum c_i wichtig ist..

Korrelation zwischen c_i und u_{it} und seine Konsequenzen



1a) 1b) 1c)

Quelle:Hsiao (1986), S.7

Referenzergebnis: Pooled OLS

- OLS Regression von y_{it} auf $\mathbf{x}_{it}$ (d.h. exp_{it} und $\mathbf{w}_{it}$)
- .. als ob $N \cdot T$ unabhängige Querschnitts-beobachtungen zur Verfügung wären.
- Panelstruktur wird ignoriert, insb. $v_{it} = c_i + u_{it}$
- OLS-Koeffizientenschätzer von exp_{it} wahr-scheinlich zu hoch
- OLS-Standardfehler sind zu klein, da T-Beobachtungen zum selben i eben keine unabhängige, „frische“ Information sind

Variablen im Exportbeispiel

Abhängige Variable

$$lnap_{it} = \ln\left(\frac{Umsatz_{it}}{tätige\ Personen_{it}}\right)$$

Erklärende Variablen

Export-Dummy $exp_{it} = 1$ wenn $Auslandsumsatz_{it} > 0$

Betriebsgröße: $lntP_{it} = \ln(tätige\ Personen_{it})$

Qualität der Belegschaft: $arbeiterant_{it} = \frac{Arbeiter_{it}}{tätige\ Personen_{it}}$

$$lohn_{it} = \frac{Lohnsumme_{it}}{tätige\ Personen_{it}} - Durchschnittslohn(HG, Region)_t$$

Dummies für

- Osten
- Hauptgruppen (IG, GG, VG, Basis VL)
- für hochwertige und Spitzentechnologie
- für Mehrbetriebsunternehmen
- für die Jahre 1996 bis 2006.

Pooled-OLS Schätzung (1)

```
reg lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu jahr1996- jahr2005

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =  490350
-------------+------------------------------           F( 22,490327) = 8418.99
       Model |  76271.5849    22  3466.89022           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  201913.723490327  .411794013           R-squared     =  0.2742
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2741
       Total |  278185.308490349  .567321047           Root MSE      =  .64171

------------------------------------------------------------------------------
        lnap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         exp |    .2261  .00213   106.15  0.000  .2219     .2302
        lntP |   .0106877   .0009545    11.20   0.000     .0088169    .0125586
 arbeiterant |  -.2059455   .0053656   -38.38   0.000    -.2164619   -.1954291
        lohn |   .0002943   1.01e-06   291.99   0.000     .0002923    .0002963
        hgd2 |  -.1745256   .0024932   -70.00   0.000    -.1794121   -.1696391
        hgd3 |  -.2265739   .0046738   -48.48   0.000    -.2357344   -.2174135
        hgd4 |  -.2309772   .0025499   -90.58   0.000     -.235975   -.2259794
         ost |  -.2075498   .0024272   -85.51   0.000     -.212307   -.2027926
       techd1 |  -.1237306   .0049172   -25.16   0.000    -.1333681    -.114093
       techd2 |  -.0394741   .0028505   -13.85   0.000     -.045061   -.0338872
          ⋮
```

Pooled-OLS Schätzung (2)

```
reg lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu jahr1996-
jahr2005, cluster(bnr)

Linear regression                                       Number of obs =  490350
                                                        F( 22, 68891) = 1037.78
                                                        Prob > F      =  0.0000
                                     (Std. Err. adjusted for 68892 clusters in bnr)
------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        lnap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         exp |   .2261   .005198 43.50 0.000   .2159     .2363
        lntP |   .0106877   .0031677     3.37   0.001      .004479    .0168965
 arbeiterant |  -.2059455   .0175763   -11.72   0.000    -.2403951   -.1714959
        lohn |   .0002943   8.81e-06    33.42   0.000      .000277    .0003116
        hgd2 |  -.1745256   .0051605   -33.82   0.000    -.1846402    -.164411
        hgd3 |  -.2265739   .0092187   -24.58   0.000    -.2446425   -.2085053
        hgd4 |  -.2309772   .0075909   -30.43   0.000    -.2458553   -.2160991
         ost |  -.2075498   .0066992   -30.98   0.000    -.2206803   -.1944193
      techd1 |  -.1237306   .0099162   -12.48   0.000    -.1431663   -.1042948
      techd2 |  -.0394741   .0059907    -6.59   0.000    -.0512158   -.0277324
```

⋮

Pooled-OLS Schätzung (2)

```
reg lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu jahr1996-
jahr2005, cluster(bnr)

Linear regression                                      Number of obs =  490350
                                                       F( 22, 68891) = 1037.78
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                     (Std. Err. adjusted for 68892 clusters in bnr)
------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        lnap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         exp |   .2261   .005198  43.50   0.000   .2159     .2363
         arb |
```

Zum Vergleich

```
         exp |    .2261   .00213   106.15   0.000   .2219     .2302
        hgd3 |  -.2265739   .0092187   -24.58   0.000   -.2446425   -.2085053
        hgd4 |  -.2309772   .0075909   -30.43   0.000   -.2458553   -.2160991
         ost |  -.2075498   .0066992   -30.98   0.000   -.2206803   -.1944193
       techd1 |  -.1237306   .0099162   -12.48   0.000   -.1431663   -.1042948
       techd2 |  -.0394741   .0059907    -6.59   0.000   -.0512158   -.0277324
```

⋮

Pooled OLS

Unter welchen Bedingungen ist Pooled OLS konsistent?

Annahme POLS.1:

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}^{'} v_{it}\right) = \mathbf{0} \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

- Das beinhaltet:

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}^{'} u_{it}\right) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}^{'} c_{i}\right) = \mathbf{0} \qquad \forall t$$

D.h., erklärende Variablen und c_i sind unkorreliert

Panel-Regression

Modelle/Schätzer,
die Panelstruktur ($v_{it} = c_i + u_{it}$)
berücksichtigen

Fixed Effects Modell

$E(c_i|\mathbf{x}_{it})$ beliebig bzw.
$Cov(c_i, x_{j,it})$ beliebig

- Within-Schätzer
- First-Difference Schätzer

Random Effects Modell

$E(c_i|\mathbf{x}_{it})=0$
$Cov(c_i, x_{j,it})=0$

- pooled OLS (consistent)
- pooled GLS (efficient)

Random oder Fixed Effects?

- Traditionell wird c_i bezeichnet als
  - *Random Effect*, wenn es wie eine Zufallsvariable behandelt wird.
  - *Fixed Effect*, wenn es wie ein Parameter behandelt wird, der für jedes Individuum i geschätzt werden kann.
- In mikroökonometrischen Panels mit einer großen Zahl von Zufallsziehungen aus der Grundgesamtheit macht es fast immer Sinn, die unbeobachteten Effekte als Zufallsvariablen zu behandeln.

Random oder Fixed Effects?

- In der modernen Ökonometrie ist die Schlüsselfrage, ob c_i korreliert ist mit den beobachteten erklärenden Variablen oder nicht:
  - *Random Effect* wenn keine Korrelation vorliegt:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_{it}, c_i) = \mathbf{0}, \quad t = 1,2,\ldots,T$$

  - *Fixed Effect* bedeutet, dass man Korrelationen zwischen c_i und $\mathbf{x}_{it}$ erlaubt

FE vs RE im Exportbeispiel

Was wäre in unserem Beispiel plausibel?

- Unbeobachtete Effekte, die die Produktivität beeinflussen, könnten z.B. Managementqualität, spezielles Know-How oder gute Kapitalausstattung sein.
- Diese Merkmale könnten durchaus mit dem Exportverhalten korreliert sein. Ein gutes Produkt lässt sich auch im Ausland besser verkaufen.

  ➢ **Fixed Effects Modell plausibler**

Fixed Effects Modell

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Annahme FE.1: strikte Exogenität

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0, \;\; t = 1,\ldots,T$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \ldots, \mathbf{x}_{iT})$$

D.h., beliebige Beziehung zwischen $\mathbf{x}_{it}$ und c_i aber gegeben c_i gibt es **keine** Beziehung zwischen u_{it} und den $\mathbf{x}_{it}$ **aller** Perioden.

Strikte Exogenität (1)

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it} \qquad \mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0$$

implizieren

$$\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \ldots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = \mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i$$

- Die erste Gleichung bedeutet, dass nach Kontrolle von $\mathbf{x}_{it}$ und c_i alle $\mathbf{x}_{is}$ keinen Einfluss mehr auf y_{it} haben für $s \neq t$.
- Die zweite Gleichung beschreibt die funktionale Form von $\mathrm{E}(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i)$.

Strikte Exogenität (2)

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0, \;\; t = 1, \ldots, T$$

schließt aus

– verzögerte abhängige Variablen in $\mathbf{x}_{it}$:

$$y_{it} = \beta_1 y_{it-1} + c_i + u_{it}$$

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = \mathrm{E}(u_{it} \mid y_{iT-1}, \ldots, y_{it}, \ldots, y_{i1}, c_i) \overset{?}{=} 0$$

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid y_{it}, c_i) = \mathrm{E}(u_{it} \mid \beta_1 y_{it-1} + c_i + u_{it}, c_i) \neq 0$$

Strikte Exogenität (2)

$$\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0, \;\; t = 1,\ldots,T$$

schließt aus

- verzögerte abhängige Variablen in $\mathbf{x}_{it}$:
- Feedbackeffekte von verzögerten Schocks ($u_{it\text{-}1}$, $u_{it\text{-}2}$,..) auf Elemente von $\mathbf{x}_{it}$ (so dass $\mathrm{E}(u_{it\text{-}1} \mid \mathbf{x}_{it}) \neq 0$)

Beispiel: $$lnap_{it} = \beta_0 + \beta_1 exp_{it} + \mathbf{w}_{it}\boldsymbol{\gamma} + c_i + u_{it}$$

- Ist exp_{it} strikt exogen?
- Exporttätigkeit heute könnte von vergangenen Produktivitätsschocks beeinflusst sein.
- Ashenfelter‘s Dip

Within Transformation

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

gilt auch im Durchschnitt für jedes i:

$$\bar{y}_i = \bar{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\beta} + c_i + \bar{u}_i \qquad \text{mit} \quad \bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$$

Abziehen der Gleichung voneinander ergibt

$$\underbrace{y_{it} - \bar{y}_i}_{\ddot{y}_{it}} = \underbrace{(\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)}_{\ddot{\mathbf{x}}_{it}}\boldsymbol{\beta} + \underbrace{u_{it} - \bar{u}_i}_{\ddot{u}_{it}}$$

was die c_i eliminiert, aber auch alle zeitkonstanten erklärenden Variablen.

Within Schätzer

Within Schätzer („Fixed Effects Schätzer“):

Pooled OLS Schätzer von $\ddot{y}_{it}$ auf $\ddot{\mathbf{x}}_{it}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{\mathbf{x}}_i' \ddot{\mathbf{x}}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{\mathbf{x}}_i' \ddot{\mathbf{y}}_i \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \ddot{\mathbf{x}}_{it}' \ddot{\mathbf{x}}_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \ddot{\mathbf{x}}_{it}' \ddot{y}_{it} \right)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ ist konsistent unter FE.1 (strikte Exogenität) und einer Rangbedingung .

First Difference Transformation

Bei zwei Perioden können die Gleichungen von Periode 1 und Periode 2 abgezogen werden:

$$\underbrace{y_{it} - y_{it-1}}_{} = \underbrace{\left(\mathbf{x}_{it} - \mathbf{x}_{it-1}\right)}_{} \boldsymbol{\beta} + \underbrace{u_{it} - u_{it-1}}_{}$$

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}$$

Lineares Modell in Differenzen ohne Konstante und ohne c_i aber auch ohne zeitkonstante erklärende Variablen

First Difference Schätzer

First Difference Schätzer ist der

Pooled OLS Schätzer der Regression

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FD}$ ist konsistent unter FE.1 (strikte Exogenität) und einer Rangbedingung .

Es läßt sich zeigen, dass $\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0, \Rightarrow \mathrm{E}(\Delta \mathbf{x}_{it} \Delta u_{it}) = \mathbf{0}$

Within/FE-Schätzer

```
xtreg lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu jahr1996-
jahr2005, fe

Fixed-effects (within) regression               Number of obs      =    490350
Group variable: bnr                             Number of groups   =     68892
R-sq:  within  = 0.1085                         Obs per group: min =         1
       between = 0.1169                                        avg =       7.1
       overall = 0.1062                                        max =        11
                                                F(22,421436)       =   2332.55
corr(u_i, Xb)  = 0.1393                         Prob > F           =    0.0000
------------------------------------------------------------------------------
        lnap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         exp |    .094   .002232 42.13 0.000   .0897     .0984
        lntP |  -.0849324   .0018994   -44.72   0.000    -.0886551   -.0812097
 arbeiterant |   .2467592   .0070208    35.15   0.000     .2329986    .2605198
        lohn |    .000111   6.12e-07   181.42   0.000     .0001098    .0001122
        hgd2 |   .0440935   .0040725    10.83   0.000     .0361116    .0520754
        hgd3 |    -.04193   .0084138    -4.98   0.000    -.0584208   -.0254392
        hgd4 |  -.0738374     .00393   -18.79   0.000    -.0815401   -.0661348
         ost |  -.1189403    .086207    -1.38   0.168    -.2879033    .0500227
       techd1 |  -.0001622   .0093895    -0.02   0.986    -.0185654     .018241
       techd2 |  -.0083742   .0043336    -1.93   0.053    -.0168678    .0001194
          mbu |   .0477343   .0033557    14.22   0.000     .0411572    .0543114
          mlu |   .0160272   .0029988     5.34   0.000     .0101498    .0219047
```

⋮

FD-Schätzung

```
reg D.lnap D.(exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu) jahr1996-
jahr2005, nocons

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =  418883
-------------+------------------------------           F( 22,418861) = 1703.48
       Model |   2708.8714    22  123.130518           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  30275.9277418861  .072281563           R-squared     =  0.0821
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0821
       Total |  32984.7991418883  .078744659           Root MSE      =  .26885

------------------------------------------------------------------------------
      D.lnap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      D1.exp |      .0658   .002038    32.28   0.000     .0618    .0698
      D1.lntP |  -.1131673   .0024425   -46.33   0.000    -.1179546   -.10838
D1.arbeiter  |   .2615805    .008184    31.96   0.000     .2455402   .2776209
      D1.lohn |    .000098   5.63e-07   174.18   0.000     .0000969   .0000991
      D1.hgd2 |   .0171386   .0048712     3.52   0.000     .0075913   .026686
      D1.hgd3 |   -.052439   .0097992    -5.35   0.000    -.0716451   -.033233
      D1.hgd4 |  -.0560545   .0050806   -11.03   0.000    -.0660122   -.0460967
       D1.ost |  -.1005532    .109766    -0.92   0.360    -.3156913   .1145849
    D1.techd1 |  -.0201129   .0102773    -1.96   0.050    -.0402561   .0000303
```

⋮

FE(Within) und zeitkonstante X

$$y_{it} - \bar{y}_i \quad = \quad (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i) \quad \boldsymbol{\beta} \quad + \quad u_{it} - \bar{u}_i$$

Within-Transformation eliminiert alle zeitkonstanten erklärenden Variablen ….

$$y_{it} = \theta_1 + \theta_2 d2_t + \ldots + \theta_T d2_T + z_i \boldsymbol{\gamma}_1 + d2_t z_i \boldsymbol{\gamma}_2$$
$$+ \ldots + dT_t z_i \boldsymbol{\gamma}_T + \mathbf{w}_{it} \boldsymbol{\delta} + c_i + u_{it}$$

$\theta_1 + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\gamma}_1$ kann nicht von c_i getrennt werden aber:
Zeitperioden-effekte ($\theta_2, \ldots, \theta_T$) und Differenzen der partielle Effekte zeitkonstanter Variablen ($\boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_T$) können (relativ zur Basisperiode) geschätzt werden
(Bsp: Veränderung des gender wage gap) (Wooldridge 2002, S. 267)

Random Effects Modell

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Annahme RE.1:

(a) $\mathrm{E}(u_{it} \mid \mathbf{x}_i, c_i) = 0, \quad t = 1,\ldots,T$

(b) $\mathrm{E}(c_i \mid \mathbf{x}_i) = \mathrm{E}(c_i) = 0$

Zusätzlich zur strikten Exogenität dürfen erklärende Variablen nicht mit c_i korreliert sein.

Schätzung im Random Effects Modell

Unter Annahme RE.1 gilt

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it} \qquad \mathrm{E}(v_{it} \mid \mathbf{x}_i) = 0, \quad t = 1,\ldots,T$$

➔Pooled OLS ist konsistent.

Aber: selbst wenn

$\mathrm{E}(u_{it}u_{its}) = 0$ für alle $t \neq s$ und $\mathrm{E}(u_{it}^2 \mid \mathbf{x}_i) = \mathrm{E}(u_{it}^2) = \sigma_u^2$,

(d.h., u_{it} seriell unkorreliert und homoskedastisch)

$$\mathrm{E}(v_{it}^2) = \sigma_c^2 + \sigma_u^2$$

$$\mathrm{E}(v_{it}v_{is}) = \mathrm{E}[(c_i + u_{it})(c_i + u_{is})] = \mathrm{E}(c_i^2) = \sigma_c^2$$

➔GLS ist effizient

Schätzung im Random Effects Modell

Also

$$\Omega = \mathrm{E}\left(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{'}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_c^2 + \sigma_u^2 & \sigma_c^2 & \cdots & \sigma_c^2 \\ \sigma_c^2 & \sigma_c^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_c^2 \\ \sigma_c^2 & & & \sigma_c^2 + \sigma_u^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i^{'} \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i^{'} \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{y}_i \right)$$

RE-Schätzung

```
xtreg lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu jahr1996-
jahr2005, re

Random-effects GLS regression                   Number of obs      =    490350
Group variable: bnr                             Number of groups   =     68892

R-sq:  within  = 0.1036                         Obs per group: min =         1
       between = 0.2307                                        avg =       7.1
       overall = 0.2109                                        max =        11

Random effects u_i ~ Gaussian                   Wald chi2(22)      =  62877.10
corr(u_i, X)       = 0 (assumed)                Prob > chi2        =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
        lnap |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         exp |    .129   .00212   60.89 0.000   .125     .133
        lntP |  -.0231146   .0015381   -15.03   0.000    -.0261292      -.0201
 arbeiterant |   .0859501   .0063531    13.53   0.000     .0734982     .098402
        lohn |    .000124   6.09e-07   203.63   0.000     .0001228    .0001252
        hgd2 |  -.0160926    .003498    -4.60   0.000    -.0229486   -.0092366
        hgd3 |  -.1061965   .0071419   -14.87   0.000    -.1201944   -.0921985
        hgd4 |    -.11685   .0034461   -33.91   0.000    -.1236042   -.1100958
         ost |  -.2652447     .00635   -41.77   0.000    -.2776904    -.252799
       techd1 |   .0028429   .0078006     0.36   0.716     -.012446    .0181318
       techd2 |  -.0068413   .0038463    -1.78   0.075    -.0143799    .0006973
          mbu |   .0857305    .003222    26.61   0.000     .0794154    .0920455
          mlu |   .0688241   .0028348    24.28   0.000     .0632681    .0743802
            :
```

RE vs. FE/FD

- FE/FD sind konsistent unter RE-Annahmen
- RE und Pooled OLS sind inkonsistent unter FE-Annahme, falls c_i und $\mathbf{x}_{it}$ korreliert sind.
- Vorbehalt: Linearität und Additivität
- Hausman-Test (vergleicht RE und FE Koeffizienten der zeitvariierenden Regressoren)

$$\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,RE} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,FE}\right)^{T} \left[\hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,RE}\right) - \hat{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,FE}\right)\right]^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,RE} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,FE}\right) \overset{H_0}{\sim} \chi_M$$

```
Test:  Ho:  difference in coefficients not systematic

                chi2(21) = (b-B)'[(V_b-V_B)^(-1)](b-B)
                         =    10424.40
              Prob>chi2 =      0.0000
```

Vergleich der Schätzungen

	Coef.	S.E.	z	P>|z|	[95% Conf. Intv]	
OLS	.226	.00520	43.50	0.000	.216	.236
RE	.129	.00212	60.89	0.000	.125	.133
FE	.094	.00223	42.13	0.000	.090	.098
FD	.066	.00204	32.28	0.000	.062	.070

Geschätzter Exporteffekt schwankt zwischen

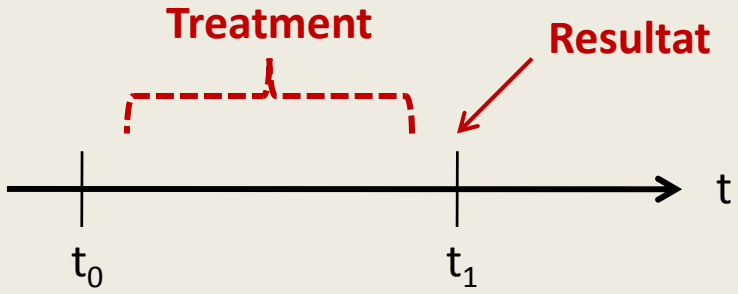
$e^{\hat{\beta}_{1,FD}} - 1 = e^{0.66} - 1 = 0.068$ und $e^{\hat{\beta}_{1,OLS}} - 1 = e^{0.226} - 1 = 0.254$

OLS und RE ignorieren c_i und überschätzen Exporteffekt.

FE bzw. FD Schätzungen sind überzeugender.

Aber schätzen sie `kausalen Effekt‘ (im Sinne von Rubin/Brüderl) ?

Kausaler Effekt im 2-Perioden Sonderfall



id	t	Y	D
i	t_0	Y_{0it_0}	0
i	t_1	Y_{1it_1}	1
⋮	⋮	⋮	⋮
j	t_0	Y_{0jt_0}	0
j	t_1	Y_{0jt_1}	0
⋮	⋮	⋮	⋮

$$ATOT = E\left[Y_{1it_1} - Y_{0it_1} | D_{it_1} = 1\right]$$

$$= E\left[Y_{1it_1} | D_{it_1} = 1\right] - E\left[Y_{0it_1} | D_{it_1} = 1\right]$$

$$\hat{ATOT}_{DID} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\left(Y_{1it_1} - Y_{0it_0}\right) - \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}\left(Y_{0jt_1} - Y_{0jt_0}\right)$$

$$= \left[\left(\overline{Y}_{1t_1}\right)_1 - \left(\overline{Y}_{0t_0}\right)_1\right] - \left[\left(\overline{Y}_{0t_1}\right)_0 - \left(\overline{Y}_{0t_0}\right)_0\right]$$

Kausaler Effekt im 2-Perioden Sonderfall

$$\hat{ATOT}_{DID} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}(Y_{1it_1} - Y_{0it_0}) - \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}(Y_{0jt_1} - Y_{0jt_0})$$

$$= \left[\left(\bar{Y}_{1t_1}\right)_1 - \left(\bar{Y}_{0t_0}\right)_1\right] - \left[\left(\bar{Y}_{0t_1}\right)_0 - \left(\bar{Y}_{0t_0}\right)_0\right]$$

id	t	Y	D
i	t_0	Y_{0it_0}	0
i	t_1	Y_{1it_1}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	t_0	Y_{0jt_0}	0
j	t_1	Y_{0jt_1}	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Im 2-Perioden Fall gilt:
DID-Schätzer = FD-Schätzer von β_1 in

$$\Delta y_{it} = \beta_0 + \beta_1 \Delta D_{it} + \Delta u_{it}$$

Heckman et. al. (1997): FE ist der „close cousin“ von DID

DID, FD, FE schätzen kausalen Effekt!

Kausaler Effekt im 2-Perioden Sonderfall

$$\hat{ATOT}_{DID} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}(Y_{1it_1} - Y_{0it_0}) - \frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}(Y_{0jt_1} - Y_{0jt_0})$$

$$= \left[\left(\bar{Y}_{1t_1}\right)_1 - \left(\bar{Y}_{0t_0}\right)_1\right] - \left[\left(\bar{Y}_{0t_1}\right)_0 - \left(\bar{Y}_{0t_0}\right)_0\right]$$

Identifizierungsbedingung:

$$E\left(Y_{0t_1} - Y_{0t_0} | D = 1\right) = E\left(Y_{0t_1} - Y_{0t_0} | D = 0\right)$$

ist mit (Variante von) „selection on the unobservables“ vereinbar

$$E\left(c_i | D = 1\right) \neq E\left(c_i | D = 0\right)$$

`Panelnormalfall'

id	t	Y	D	ΔD
11	t_0	Y_{0t_0}	0	
11	t_1	Y_{1t_1}	1	1
12	t_0	Y_{1t_0}	1	
12	t_1	Y_{1t_1}	1	0
13	t_0	Y_{0t_0}	0	
13	t_1	Y_{0t_1}	0	0
14	t_1	Y_{1t_0}	1	
14	t_1	Y_{0t_1}	0	-1

Falls T>2:
"multiplicity of contrasts that are sometimes available" H,L&S

Sequential Treatments

Rubin-Modell und FE Panel-Modell

$$Y_{1it_1} = \mu_{1t_1}(X) + U_{1it_1}$$

$$Y_{0it_1} = \mu_{0t_1}(X) + U_{0it_1}$$

$$Y_{0it_1} = \beta_0^0 + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

$$Y_{1it_1} = \beta_0^1 + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

The treatment dummy can be systematically related to the persistent component of the error term . This makes FE particularly suitable for applications where participation in a program is determined by preprogram attributes that also affect Y_{it}:
Wooldridge (2002, S.278

Wozu Paneldaten?

Josef Brüderl:

1. zur Schätzung kausaler Effekte trotz unbeobachteter Heterogenität (Marriage-Premium for Men?)
2. zur Analyse individueller Dynamik
3. zur präziseren Schätzung (mehr Beobachtungen)

Beispiel zu 2): Persistenz im Export

Problem: Wird in jeder Periode neu über die Höhe der Produktivität entschieden?

Durch spezielles Know-How (z.B. durch Patente geschützt) könnte es zu Persistenzen in der Produktivität kommen, d.h. die Produktivität in einer Periode ist auch abhängig vom Wert in der Vorperiode.

State Dependence vs. unbeobachtete Heterogenität

$$y_{it} = \alpha y_{i,t-1} + c_i + u_{it}$$

$$\begin{aligned} Cor(y_{it}, y_{i,t-1}) &= Cor(\alpha y_{i,t-1} + c_i + u_{it}, y_{i,t-1}) \\ &= \alpha + Cor(c_i, y_{i,t-1}) \\ &= \alpha + \frac{(1-\alpha)}{[1+(1-\alpha)\sigma_u^2]/[(1+\alpha)\sigma_c^2]} \end{aligned}$$

Bsp: y_{it} ist Studienfleiß. Lohnt es sich, Schüler zu bekehren (weil es positive State Dependence gibt ($\alpha>0$) oder ist Fleiß „angeboren“ (hohes c_i)

Dynamisches Panelmodell

Dynamisches Modell:

$$y_{it} = \alpha y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

Durch die verzögerte abhängige Variable können die Standardmodelle nicht angewendet werden.

Bsp. FE:

$$\ddot{y}_{i,t-1} = y_{i,t-1} - \frac{1}{T-1}(y_{i1} + \ldots + y_{it} + \ldots + y_{i,T-1})$$

$$\ddot{u}_{it} = u_{it} - \frac{1}{T-1}(u_{i2} + \ldots + u_{i,t-1} + \ldots + u_{iT})$$

Dynamisches Panelmodell

Lösung: FD-Transformation, IV-Ansatz

$$\Delta y_{it} = \alpha \Delta y_{i,t-1} + \Delta \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \quad \text{für } t = 3,\ldots,T$$

Mögliche Instrumente für $\Delta y_{i,t-1}$:

- Um eine weitere Periode verzögerte erste Differenz $\Delta y_{i,t-2}$, „verbraucht“ jedoch weitere Periode
- Niveau aus *t-2*: $y_{i,t-2}$, ist mit $\Delta y_{i,t-1}$ korreliert, jedoch nicht mit Δu_{it} (wenn keine Autokorrelation vorliegt)

Dynamisches Panelmodell

Lösung: FD-Transformation, IV-Ansatz

$$\Delta y_{it} = \alpha \Delta y_{i,t-1} + \Delta \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \quad \text{für } t = 3,\ldots,T$$

Mögliche Instrumente für :

- Niveau aus *t-2*: y_{it-2} , ist mit Δy_{it-1} korreliert, jedoch nicht mit Δu_{it} (wenn keine Autokorrelation vorliegt).
- Wenn T>2 gibt es viele solcher Instrumentvariablen

  In Periode 3: y_{i1} ist ein Instrumente für Δy_{i3}

  In Periode 4: y_{i1} , y_{i2} sind Instrumente für Δy_{i3}

  In Periode 5: y_{i1}, y_{i2} , y_{i3} sind Instrumente für Δy_{i3}

  In Periode 6: y_{i1} , y_{i2}, y_{i3}, y_{i4} sind Instrumente für Δy_{i3}

Dynamisches Panelmodell

Verbesserung: Verwendung aller möglicher Lags

$$Z_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{i1} & y_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{i1} & \cdots & y_{i,T-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} t \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ T \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_{i1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [y_{i1}, y_{i2}] & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & [y_{i1}, \ldots, y_{i,T-2}] \end{bmatrix}$$

Dynamisches Panelmodell

Momente aus den Instrumenten (GMM):

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{Z}_i^{'}\Delta\mathbf{u}_i\right)=\mathbf{0}$$

- Mehrgleichungssystem, i.A. keine eindeutige Lösung

Zu minimierende Kriteriumsfunktion:

$$J_N=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{u}_i^{'}\mathbf{Z}_i\right)\mathbf{W}_N\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^{'}\Delta\mathbf{u}_i\right)$$

Dynamisches Panelmodell

Two-Step Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{W}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{Z}_i^{'} \, \hat{\Delta \mathbf{u}}_i \, \hat{\Delta \mathbf{u}}'_i \, \mathbf{Z}_i \right) \right]^{-1}$$

mit konsistenten Schätzern $\hat{\Delta \mathbf{u}}_i$ aus einer Schätzung im ersten Schritt.

2-stufige GMM Schätzung

```
xtabond2 lnap L.lnap exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1 techd2 mbu mlu
jahr1997-jahr2005, gmm(L.lnap) iv(exp lntP arbeiterant lohn hgd2 hgd3 hgd4 ost techd1
techd2 mbu mlu jahr1997-jahr2005)nolevel nocons nomata twostep

Dynamic panel-data estimation, two-step difference GMM
------------------------------------------------------------------------------
Group variable: bnr                             Number of obs      =    356008
Time variable : jahr                            Number of groups   =     55415
Number of instruments = 66                      Obs per group: min =         1
Wald chi2(21) =   3611.55                                      avg =      6.42
Prob > chi2   =     0.000                                      max =         9
------------------------------------------------------------------------------
        lnap |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        lnap |
         L1. |   .3252009   .0143708    22.63   0.000     .2970346    .3533672
         exp |   .0591962    .003998    14.81   0.000     .0513603    .0670321
        lntP |  -.1757293   .0141978   -12.38   0.000    -.2035564   -.1479022
 arbeiterant |   .3159173   .0283449    11.15   0.000     .2603624    .3714722
        lohn |   .0001044   .0000166     6.28   0.000     .0000718     .000137
        hgd2 |   .0217152   .0068951     3.15   0.002      .008201    .0352294
        hgd3 |  -.0468468   .0166921    -2.81   0.005    -.0795628   -.0141308
        hgd4 |  -.0631432   .0092034    -6.86   0.000    -.0811815    -.045105
         ost |  -.0576256   .1522563    -0.38   0.705    -.3560423    .2407912
      techd1 |  -.0204412   .0161387    -1.27   0.205    -.0520726    .0111901
      techd2 |  -.0027803   .0072628    -0.38   0.702    -.0170151    .0114546
           :
           :
-------------+----------------------------------------------------------------
Arellano-Bond test for AR(1) in first differences: z = -27.63  Pr > z =  0.000
Arellano-Bond test for AR(2) in first differences: z =   0.57  Pr > z =  0.567
------------------------------------------------------------------------------
```

Ausblick: Nichtlineare Modelle

- Fixed-Effects Logit

with $$\mathrm{P}\left(y_{i1}=1|c_i,\boldsymbol{\beta}\right)=\frac{\exp(c_i+\mathbf{x}_{i2}'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(c_i+\mathbf{x}_{i2}\boldsymbol{\beta})},$$

it follows that the conditional probability is given by

$$\mathrm{P}\left((0,1)|t_i=1,c_i,\boldsymbol{\beta}\right)=\frac{\exp((\mathbf{x}_{i2}-\mathbf{x}_{i1})'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp((\mathbf{x}_{i2}-\mathbf{x}_{i1})'\boldsymbol{\beta})},$$

- Random Effects Probit

$$P(\text{Mieter}_{h,t})=\Phi(\beta_0+\beta_1\rho_{p,r}+\beta_2 T_{h,t}+\beta_3\text{Mieter}_{h,t-1}+\mathbf{x}_{h,t}^{\top}\boldsymbol{\delta}+\mathbf{z}_{h,t}^{\top}\boldsymbol{\theta}+c_h)$$

  - c_h : unbeobachtete Heterogenität

  - $c_h|\left(\text{Mieter}_{h0},\boldsymbol{\rho}_h,\boldsymbol{T}_h,\mathbf{x}_h\right)\sim N(\alpha_0+\alpha_1\text{Mieter}_{h0}+\boldsymbol{\alpha_2}^{\top}\boldsymbol{\rho}_h+\boldsymbol{\alpha_3}^{\top}\boldsymbol{T}_h+\boldsymbol{\alpha_4}^{\top}\mathbf{x}_h,\sigma_a^2)$